Valós számok halmaza és részhalmazai. Számelméleti alapfogalmak és tételek. Számrendszerek.

A valós számokat a természetes számoktól szeretném első körben felépíteni és csak utána kifejteni a tétel többi részét.

**TERMÉSZETES SZÁMOK**

jele: N

definíció1:

A véges halmazok számosságát természetes számoknak nevezzük,

ha  AnB= 0   |AuB| = |A| + |B|

ha  AnB= 0   |AxB| = |A| \* |B|

definíció2:

(Peano-axiómák)

Az N halmazt a természetes számok halmazának nevezzük, ha teljesülnek rá:

1. 1 eleme N-nek
2. n eleme N-nek => n+ eleme N-nek
3. nem létezik n eleme N-nek : n+ = 1
4. bármely n,m eleme N-nek : n+ = m+ => n=m
5. N\* részhalmaza N-nek és N\*-ban igaz az első 3 axióma, akkor N\*=N

(teljes indukció)

egyetlen TELJES axióma rendszer.

* neutrális elem nem tartozik hozzá a peano axiómák szerint, bár elfogadott bizonyos körökben az is, ha hozzávesszük.

Műveletek a természetes számok halmazán:

* összeadás, szorzás (nincs inverzük)
  + 0 🡪 az összeadásra nézve neutrális elem
  + 1 🡪 a szorzásra nézve neutrális elem

Term. számok halmaza (**N**) + 0 + negatív Term. számok (**N-**) = **az egész számok halmazával** (**Z**)

A szorzás invertálhatósága érdekében jöttek létre a **racionális számok**. 🡪 osztás

* jele: **Q**
* mindig elvégezhető: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás

A számok jelentős része nem írható fel két racionális szám hányadosaként, ezért tovább bővítjük a számok halmazát az **irracionális számokra** (**Q\***)

**Tétel:** Léteznek irracionális számok.

Bizonyítás:

*Tfh.: √2 eleme Q-nak*

*√2 = p/q     q≠0   p,q eleme Z-nek*

*√2 \* q = p*

*2 q2 = p2  (NINCS 2 olyan négyzetszám, hogy az egyik 2x-ese a másiknak)*

  |         |

*PÁROS = PÁROS*

  |               |

*tehát q is osztható 4-gyel ( q páros ) = p is páros, úgyhogy p2 osztható 4-gyel*

*bal oldal= 2 páratlan hatványa*

*jobb oldal = 2 páros hatványa*

*NEM IGAZ --> tehát √2 eleme Q\*-nak*

**Nevezetes irracionális számok:** e, pi, fi …

A racionális számok és az irracionális számok halmazának úniója (**Q****Q\***=**R**) egyenlő a **valós számok halmazával**

* Bármely két racionális szám között van irracionális szám, és bármely két irracionális szám között is.
* minden alapműveletre működik kivéve a negatívból való gyökvonást

**Komplex számok halmaza:**

* Komplex számok halmazán értjük:  
  C { a+bi | a, b eleme R-nek, i=√-1 }  
  ( i = √-1 – imaginiárius egység, tehát √-20 = √20 \* √-1= √20 \* i )
* a komplex számokat koordináta rendszerben ábrázoljuk, nem számegyenesen.
* a+bi, forma
* 0-val való osztás esetére a komplex számok bővíthetőek **+∞, -∞** - re
* 

A végére szeretnék áttérni a Matematika számelmélet témakörére. Ez a témakör az amivel a legrégebb óta foglalkozik a matematika.

* pitagoreusi iskola 🡪 számokkal foglalkoztak
  + pl.: barátságos számok, tökéletes számok
* igazi alkalmazása ennek a területnek a 20. században alakult ki: kriptográfia

**Oszthatósági szabályok:**

1: Minden egész szám osztható 1-gyel.  
2: Azok a számok oszthatók 2-vel, amelyeknek utolsó számjegye(egyes helyiértéken álló) osztható 2-vel.  
3: Azok a számok oszthatók 3-mal, amelyeknek a számjegyeinek összege is osztható 3-mal.  
4: Azok a számok oszthatók 4-gyel, amelyeknek az utolsó két számjegyéből képzett kétjegyű szám is osztható 4-gyel.  
5: Azok a számok oszthatók 5-tel, amelyeknek utolsó számjegye is osztható 5-tel.  
6: Azok a számok oszthatók 6-tal, amelyek 2-vel és 3-mal is oszthatóak.  
7: 7-tel úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől utolsó előtti számjegyéig képzett számból kivonjuk az utolsó számjegy dupláját(2-szeresét).  
Ha az így kapott szám osztható 7-tel akkor az eredeti is. Ha még az így kapott számról sem tudjuk megállapítani, hogy osztható-e 7-tel, akkor ugyanezt a tendenciát kell folytatni amíg olyan számot nem kapunk amiről biztosan meg tudjuk állapítani, hogy osztható 7-tel.  
Pl.: 315 -> 31-(2\*5)=21. 21 osztható 7-tel, tehát 315 is.  
8: Azok a számok oszthatók 8-cal, amelyeknek az utolsó három számjegyéből képzett háromjegyű szám is osztható 8-cal.  
9: Azok a számok oszthatók 9-cel, amelyeknek számjegyeinek összege is osztható 9-cel.  
10: Azok a számok oszthatók 10-zel, amelyeknek utolsó számjegye is osztható 10-zel, magyarul 0-ra végződik.  
11: 11-gyel úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől utolsó előtti számjegyéig képzett számból kivonom az utolsó számjegyet. Ha az így kapott szám osztható 11-gyel, akkor az eredtei is. Ugyanúgy mint a 7-tel való oszthatóságnál itt is lehet ismételni ezt a folyamatot, ha még mindig megállapíthatatlan az oszhatóság.  
Pl.: 5258-> 525-8=517-> 51-7=44 44 osztható 11-gyel, tehát 5258 is.

**Prímszámok definilása:** Azokat a természetes számokat, amelyeknek pontosan két osztójuk van, prímszámoknak nevezzük.

**Számelmélet alaptétele:** Bármely egész szám felírható véges sok prímszám szorzataként és az a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve és az egység szorzót figyelmen kívül hagyva egyértelmű.

**Fermat-sejtés** később tétel: an+bn=cn ahol a,b,c,n ϵ **Z** , n>2 esetén nincs triviális megoldás

**Számrendszerek:** komolyabb algebrai fejlődéshez kell, plusz informatikában van nagy jelentősége

* hinduktól származtatjuk

**Alkalmazások:**

* csekkeken a sorszám ellenőrzés
* kriptográfiában🡪szuperszámítógépek
* számrendszerek🡪info
* filozófia, számmisztika

**megoldatlan problémákat hozzáfűzni a füzetből**

* **bizonyítás**